

Глава 2. Тема 5. Заметки 1.

1°. Криволинейный интеграл 1-ого рода.

Если $f(x, y, z)$ - функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C :

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

и ds - дифференциал дуги, то полагаем

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C .

2°. Криволинейный интеграл 2-ого рода.

Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой C

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

пробегаемой в направлении возрастания параметра t , то полагаем

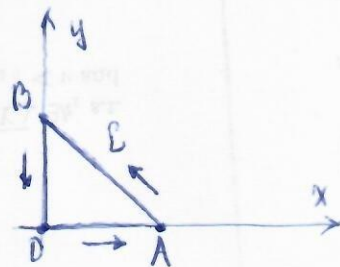
$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \{ P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \} dt. \end{aligned}$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный.

Курсе № 4221, 4226, 4229, 4237, 4251, 4255, 4281, 4252, 4279

№4221 Найти $I = \int_C (x+y) ds$, где C - контур треугольника ABD с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$

$$I = \int_C (x+y) ds = \int_{\vec{OA}} (x+y) ds + \int_{\vec{AB}} (x+y) ds + \int_{\vec{BO}} (x+y) ds = I_1 + I_2 + I_3.$$



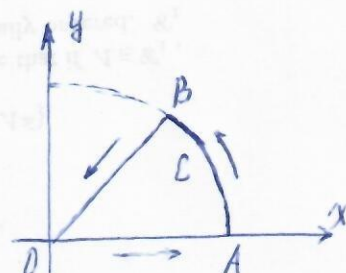
$$I_1 = \int_{\vec{OA}} (x+y) ds = \int_0^1 \left(\begin{matrix} x=t \\ y=0 \end{matrix}, 0 \leq t \leq 1 \right) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_{\vec{AB}} (x+y) ds = \int_0^1 \left(\begin{matrix} x=1-t \\ y=t \end{matrix}, 0 \leq t \leq 1 \right) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^1 dt = \sqrt{2}$$

$$I_3 = \int_{\vec{BO}} (x+y) ds = \int_0^1 \left(\begin{matrix} x=0 \\ y=1-t \end{matrix}, 0 \leq t \leq 1 \right) dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

№4226 Найти $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, где C - контур, ограниченный кривыми $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_{\vec{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{\vec{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{\vec{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = I_1 + I_2 + I_3.$$



$$I_1 = \int_{\vec{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a \left(\begin{matrix} x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi \end{matrix}, \varphi=0, 0 \leq r \leq a \right) dr = \int_0^a e^r dr = e^a - 1.$$

$$I_2 = \int_{\vec{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\begin{matrix} x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi \end{matrix}, r=a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right) a d\varphi = \frac{\pi a e^a}{4}.$$

$$I_3 = \int_{\vec{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a \left(\begin{matrix} x=\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \varphi \\ y=\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \varphi \end{matrix}, \varphi=\frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a \right) dr = \int_0^a e^{a-r} dr = e^a - 1. \Rightarrow$$

$$I = (e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4} + (e^a - 1) = 2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a.$$

№4229 Найти $I = \int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, где C - окружность $x^2+y^2=ax$.

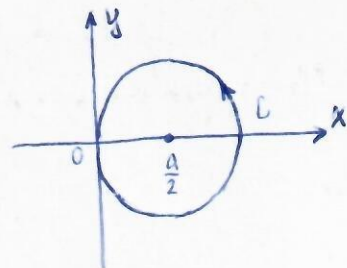
$$x^2+y^2=ax \Rightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2, a>0.$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow r^2 = a \cos \varphi \Rightarrow r = a \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \cos^2 \varphi \\ y = a \cos \varphi \sin \varphi \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x'_{\varphi} = -a \sin 2\varphi \\ y'_{\varphi} = a \cos 2\varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^4 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = a \cos \varphi \Rightarrow$$

$$I = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 2\varphi + a^2 \cos^2 2\varphi} d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2. \Rightarrow I = 2a^2.$$



N° 4237 Найти $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, где C — замкнутый кривая

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2 = a^2 + b^2 t^2$$

$$\left. \begin{aligned} x'_t &= -a \sin t \\ y'_t &= a \cos t \\ z'_t &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2 + [z'_t]^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$$

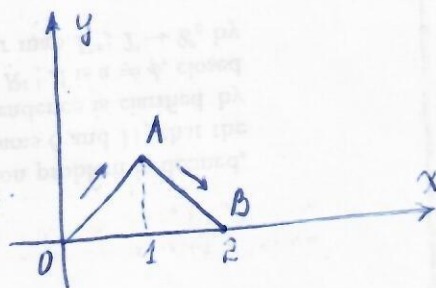
$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \frac{2\pi}{3} \{ 3a^2 + 4\pi^2 b^2 \} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Умнож $I = \frac{2\pi}{3} \{ 3a^2 + 4\pi^2 b^2 \} \sqrt{a^2 + b^2}.$

N° 4251 Найти $I = \int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, где C кривая $y = 1 - |1 - x|$, $0 \leq x \leq 2$ рассматриваемая в направлении возрастания параметра.

$$I = \int_{\vec{OA}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy +$$

$$+ \int_{\vec{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = I_1 + I_2.$$



$$\vec{OA}: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \begin{cases} x'_t = 1 \\ y'_t = 1 \end{cases}$$

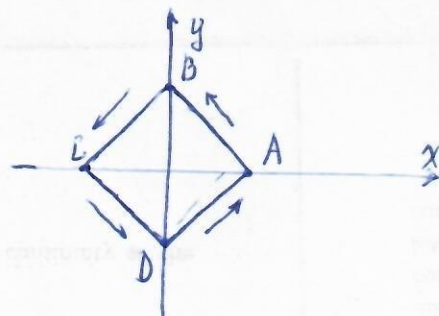
$$I_1 = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\vec{AB}: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad \begin{cases} x'_t = 1 \\ y'_t = -1 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_1^2 2(2-t)^2 dt = -\frac{2}{3} (2-t)^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow I = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

№4255 Найти $I = \oint_{ABCD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, где ABCDA - контур квадрата с верши-

нами A(1;0), B(0;1), C(-1;0), D(0;-1).



$$I = \int_{\overline{AB}} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{\overline{BC}} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{\overline{CD}} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{\overline{DA}} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

$$I_1 = \int_{\overline{AB}} \frac{dx+dy}{x+y} = \int_{y=t}^{x=1-t} \frac{dx+dy}{x+y}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \begin{matrix} x'_t = -1 \\ y'_t = 1 \end{matrix} \bigg/ = \int_0^1 0 \cdot dt = 0.$$

$$I_2 = \int_{\overline{BC}} \frac{dx+dy}{-x+y} = \int_{y=2-t}^{x=1-t} \frac{dx+dy}{-x+y}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad \begin{matrix} x'_t = -1 \\ y'_t = -1 \end{matrix} \bigg/ = -2 \int_1^2 dt = -2.$$

$$I_3 = - \int_{\overline{CD}} \frac{dx+dy}{x+y} = \int_{y=2-t}^{x=t-3} \frac{dx+dy}{x+y}, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad \begin{matrix} x'_t = 1 \\ y'_t = -1 \end{matrix} \bigg/ = \int_0^1 0 \cdot dt = 0.$$

$$I_4 = \int_{\overline{DA}} \frac{dx+dy}{x-y} = \int_{y=t-4}^{x=t-3} \frac{dx+dy}{x-y}, \quad 3 \leq t \leq 4, \quad \begin{matrix} x'_t = 1 \\ y'_t = 1 \end{matrix} \bigg/ = 2 \int_3^4 dt = 2. \Rightarrow$$

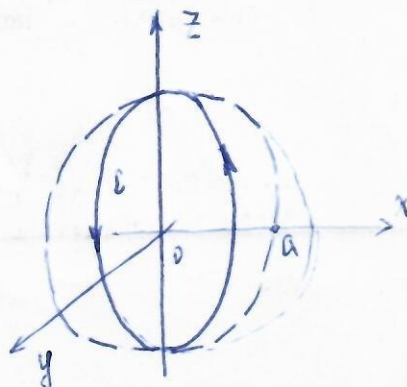
$$I = 0 - 2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow I = 0.$$

№4281 Найти $I = \int (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где Γ - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\Gamma = x \operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной x .

$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha > 0, & \text{если } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha < 0, & \text{если } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow$ рассмотрим первый случай, ибо второй рассматривается аналогично.

$$\text{Имеем } x^2(1+\operatorname{tg}^2 \alpha) + z^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(a \cos \alpha)^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 - \text{эллипс} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \alpha \cos \psi \\ z &= a \sin \psi \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = a \sin \alpha \cos \psi \Rightarrow$$



Морга

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos \psi \\ y = a \sin \alpha \cos \psi \\ z = a \sin \psi \end{cases}, 0 \leq \psi \leq 2\pi. \Rightarrow \begin{cases} x'_{\psi} = -a \cos \alpha \sin \psi \\ y'_{\psi} = -a \sin \alpha \sin \psi \\ z'_{\psi} = a \cos \psi \end{cases}$$

Максимальное параметрическое задание кривой направляющие отхода конуса с.

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_0^{2\pi} \left\{ -(\sin \alpha \cos \psi - \sin \psi) \cos \alpha \sin \psi - (\sin \psi - \cos \alpha \cos \psi) \sin \alpha \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \cos \psi) \cos \psi \right\} d\psi = a^2 \int_0^{2\pi} \left\{ -\cos \alpha \sin \alpha \cos \psi \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \sin^2 \psi - \sin \alpha \sin^2 \psi + \cos \alpha \sin \alpha \cos \psi \sin \psi + \cos \alpha \cos^2 \psi - \sin \alpha \cos^2 \psi \right\} d\psi = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\psi = 2\pi \sqrt{2} a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \Rightarrow \\ I &= 2\pi \sqrt{2} a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

Дана: № 4222, 4227, 4228, 4239, 4254, 4256, 4282.

№4222 Найти $I = \int_C y^2 ds$, где C — арка окружности

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x'_t = a(1 - \cos t) \\ y'_t = a \sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2} = \sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt = 8a^3 \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \left| \sin \frac{t}{2} \right|^5 dt = \\ &= \left| u = \frac{t}{2} \right| = 16a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|^5 du = 16a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du = 16a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 u)^2 \sin u du = \\ &= \left| w = \cos u \right| = 16a^3 \int_1^0 (1 - w^2)^2 dw = 32a^3 \int_0^1 (1 - w^2)^2 dw = 32a^3 \left(w - \frac{2}{3}w^3 + \frac{w^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{32 \cdot 8}{15} a^3 = \frac{256}{15} a^3 \Rightarrow I = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

№4227 Найти $I = \int_C |y| ds$, где C — дуга эллипса $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi \Rightarrow r^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$r = a \sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \\ y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x'_\varphi = -a \frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \\ y'_\varphi = a \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{cases} \Rightarrow$$

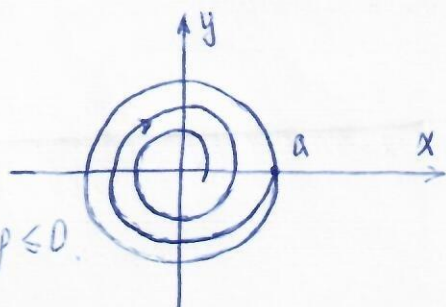
$$\sqrt{[x'_\varphi]^2 + [y'_\varphi]^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi| \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin \varphi| d\varphi = 2 \cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = \\ &= -2a^2 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(2 - \sqrt{2})a^2 \Rightarrow I = 2(2 - \sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

№4228 Найти $I = \int_C x ds$, где C — часть логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$, $k > 0$, находящаяся внутри круга $r \leq a$.

$$\begin{cases} r = a \\ r = ae^{k\varphi} \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

Спираль находится внутри круга для $-\infty < \varphi \leq 0$.



$$\begin{cases} x = ae^{k\varphi} \cos \varphi \\ y = ae^{k\varphi} \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_{\varphi} = ake^{k\varphi} \cos \varphi - ae^{k\varphi} \sin \varphi \\ y'_{\varphi} = ake^{k\varphi} \sin \varphi + ae^{k\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{[x'_{\varphi}]^2 + [y'_{\varphi}]^2} = a\sqrt{k^2+1}e^{k\varphi} \Rightarrow$$

$$I = a\sqrt{k^2+1} \int_0^0 ae^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = a^2\sqrt{k^2+1} \int_0^0 e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = (x)$$

$$\text{Умножим } \int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = e^{2k\varphi} \sin \varphi \Big|_{-\infty}^0 - 2k \int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi = -2k \int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \sin \varphi d\varphi =$$

$$= 2ke^{2k\varphi} \cos \varphi \Big|_{-\infty}^0 - 4k^2 \int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi \Rightarrow (1+4k^2) \int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = 2k \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{2k}{1+4k^2} \Rightarrow I = \frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

№4239 Найти $I = \int_C z ds$, где C - кривая, заданная уравнениями

$$x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq t_0.$$

$$\begin{cases} x'_t = \cos t - t \sin t \\ y'_t = \sin t + t \cos t \\ z'_t = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2 + [z'_t]^2} = \sqrt{2+t^2} \Rightarrow$$

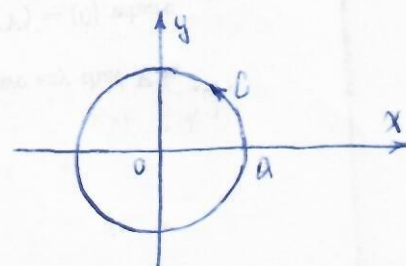
$$I = \int_0^{t_0} t \sqrt{2+t^2} dt = \frac{1}{3} (2+t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3} \left\{ (2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \left\{ (2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

№4254 Найти $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, где C - окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \begin{cases} x'_{\varphi} = -a \sin \varphi \\ y'_{\varphi} = a \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

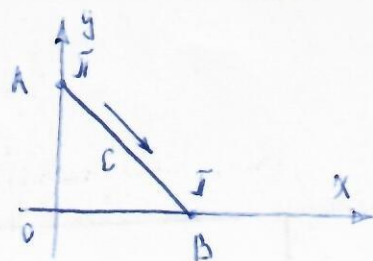
$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} (-\sin \varphi) - \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \cos \varphi \right\} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{-\sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi\} d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi. \Rightarrow I = -2\pi.$$



№4256 Найти $I = \int \sin y dx + \sin x dy$, где AB - отрезок прямой между точками $A(0; \pi)$ и $B(\pi; 0)$.

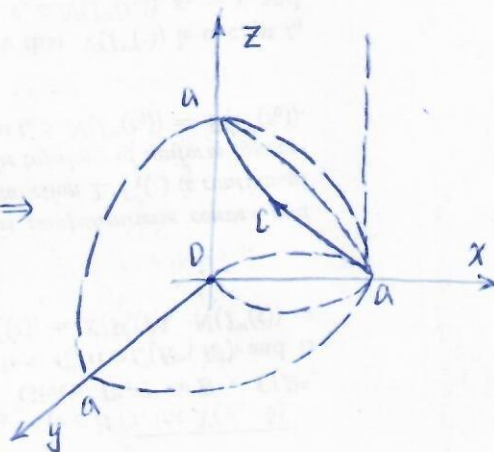
$$\begin{cases} x = \bar{t} \\ y = \bar{t}(1-t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 1, \begin{cases} x'_t = \bar{t} \\ y'_t = -\bar{t} \end{cases}$$



$$I = \bar{t} \int_0^1 \{ \sin \bar{t}(1-t) - \sin \bar{t}t \} dt = \cos \bar{t}(1-t) \Big|_0^1 + \cos \bar{t}t \Big|_0^1 = (1+1) + (-1-1) = 2-2 = 0 \Rightarrow I = 0.$$

№4282 Найми $I = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где C - часть кривой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, $a > 0$, проделанная против часовой стрелки, или ориентируясь с положительной частью $x > a$ оси Ox .

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 &\Rightarrow r = a \\ x^2 + y^2 = 2ax &\Rightarrow \\ a^2 \cos^2 \psi &= a^2 \cos \varphi \cos \psi \Rightarrow \\ \cos \varphi &= \cos \psi \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = a \cos^2 \psi = \frac{a}{2}(1 + \cos 2\psi) \\ y = a \cos \psi \sin \psi = \frac{a}{2} \sin 2\psi \\ z = a \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = a |\sin \psi| = a \sin \psi \end{cases} \text{ где } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Условие } z \geq 0 \Rightarrow \sin \psi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \psi \geq 0. \text{ и } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ -\sin^3 2\psi + 4 \sin^2 \psi \cos 2\psi + (1 + \cos 2\psi)^2 \cos \psi \} d\psi = -\frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\psi d\psi + \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \psi \cos 2\psi d\psi + \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\psi)^2 \cos \psi d\psi = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\psi d\psi = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi d\psi + \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\psi d\psi = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi d\psi - \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\psi' d\psi' \equiv 0.$$

$$I_3 = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\psi)^2 \cos \psi d\psi = \frac{a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1 - \sin^2 \psi)^2 d(\sin \psi) + \frac{a^3}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1 - \sin^2 \psi)^2 d(\sin \psi) \\ = \int_{u=\sin \psi} = a^3 \int_0^1 (1-u^2)^2 du + a^3 \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1-u^2)^2 du \equiv 0.$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi} 4 \sin^2 \varphi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi} 2(1 - \cos 2\varphi) \cos 2\varphi d\varphi = \\
 &= \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{a^3}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} - \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi} 2\cos^2 2\varphi d\varphi = \\
 &= -\frac{a^3}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = -\frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{16} \sin 4\varphi \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi a^3}{4} \Rightarrow I = -\frac{\pi a^3}{4}.
 \end{aligned}$$